POLITECNICO DI BARI – CORSO M

*LEZIONI DI GEOMETRIA E ALGEBRA*

Anno Accademico 2018 - 2019

DISPENSA 4

APPLICAZIONI LINEARI

TEORIA ED ESERCIZI

Docente: Prof. Giovanni Viterbo

**CAP. 4 - APPLICAZIONI LINEARI**

## &4.1 – Definizione di applicazione lineare - Proprietà

Def.4.1.1 – Se V e V’ sono due spazi vettoriali su , dicesi applicazione lineare di V in V' ogni applicazione

f: V → V’

tale che:

In tal caso si dice che f è compatibile con le operazioni di somma di vettori e di prodotto per uno scalare.

Sussistono le seguenti proprietà.

Prop.4.1.1 – Se f è un’applicazione lineare di V in V’, allora:

1. f(0V) = 0V’;
2. ;
3. ,

(*f trasforma combinazioni lineari di in combinazioni lineari di*

(*f trasforma sistemi di vettori L.D. di V in sistemi di vettori L.D. di V’).*

Dim. (1)

Dim. (2)



Dim. (3) Se

 (per (1) della def.1.1) = (per (2) della def.1.1) = 

Dim.(4) Sia S = (v1,v2,…,vm) un sistema di vettori L.D di 



è un sistema di vettori L.D di V’(.

Prop. 4.1.2 – Se f: V → V’ è un’applicazione lineare e se W è un sottospazio vettoriale di , si dimostra che:

1. f(W) sottospazio di V’(;
2. dim f(W)  dim W;
3. dim f(W)  dim V’(.

Dim. 1 - Osservato che , dobbiamo dimostrare che:

(a) Poiché W è un sottospazio di V

(b) Siano

=

(c) )



Dunque, f(W) è un sottospazio di V’(.

Dim. 2 - Sia W un sottospazio di dimensione r e sia BW = {w1, w2,…, wr} una base di W. 



{} è un sistema di generatori di f(W) dim f(W)= dim W 

dim f(W)dim W.

Dim. 3 – Poiché f(W) è un sottospazio di V’(, dim f(W)  dim V’.

## &4.2 – Immagine, Im(f), e nucleo, Ker(f), di un’applicazione lineare

**Immagine di una funzione lineare**

Poiché V è un sottospazio di sé stesso, per la prop.4.1.2, f(V) è un sottospazio vettoriale di V’(. Si pone, quindi, la seguente definizione:

Def.4.2.1 – Se f: V → V’ è un’applicazione lineare, il sottospazio vettoriale f(V) di V’( dicesi sottospazio immagine di f e si denota con Im(f).

La dimensione di Im(f) si dice *rango* di f e si denota con *rang(f).*

Si osservi esplicitamente che *Im(f) è l’insieme di tutte le immagini degli elementi di V,*

Im (f) = f(V) = {u’},

e che

* dim Im(f) = rang(f) dim(V’);
* dim Im(f) = rang(f) dim(V).

Prop. 4.2.1 – Se f è un’applicazione lineare di V in V’ si dimostra che:

1. f è surgettiva dim Im(f) = dim V’;
2. f è ingettiva dim Im(f) = dim V.

Dim. (1)

Se f è surgettiva 

Dim. (2)

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione m e sia B = {v1, v2, …, vm} una sua base

Quindi, per definizione di Im(f), si ha:



è un sistema di generatori di f(V).

Dimostriamo ora che  è un sistema di vettori L.I. di f(V).

Sia:

h1 = h2 = … = hm = 0

 è un sistema di vettori L.I. di f(V).

Pertanto,  è una base di Im(f) dim Im(f) = m = dim V.

**Nucleo di una funzione lineare**

Poniamo la seguente definizione.

Def. 4.2.2 - Se f è un’applicazione lineare di V in V’, dicesi nucleo di f il sottoinsieme di , indicato con Ker(f), così definito:

,

ovvero, Ker(f) è l’insieme dei vettori di che hanno immagine uguale a 0.

Sussiste la seguente proprietà.

Prop. 4.2.2 - Se f è un’applicazione lineare di V in V’, si dimostra che Ker(f) è un sottospazio vettoriale di .

Dim. Dobbiamo dimostrare che:

1. Ker(f) ;

Dim. (1) Poiché f(0) = 0

Dim. (2)

Dim.(3)

Dunque, Ker(f) è un sottospazio vettoriale di

Proprietà delle funzioni ingettive

Sussistono le seguenti fondamentali proprietà.

Prop. 4.2.3 – *(Caratterizzazione delle applicazioni lineari ingettive)*

Se f è un’applicazione lineare di V in V’, si dimostra che:

f è ingettiva  Ker f = {0}.

Dim. C.N. ( ) f ingettiva .

Per definizione, f una funzione ingettiva

Di conseguenza:

Dim. C.S.( )  è ingettiva.

Prop.4.2.4 – Se f è un’applicazione lineare ingettiva di V in V’, allora:

“*si dice che f trasforma sistemi di vettori L.I. di V in sistemi di vettori L.I. di f(V)”.*

“*si dice che f trasforma basi di V in basi di f(V) = Im(f)”.*

Dim.(1) Siano S = {v1, v2, …, vm} un sistema di vettori L.I. di V.

è un sistema di vettori di Im(f). Si ha:

sono L.I.)

Dim.(2) .

Dobbiamo dimostrare che:

è un sistema di vettori L.I.

Dunque, ogni applicazione lineare ingettiva trasforma basi di V in basi di Im(f).

Infine dimostriamo il seguente teorema.

Teor. 4.2.1 – (*Teorema della dimensione*)

*Se è un’applicazione lineare di V in V’, si dimostra che*

*dim V = dim Ker(f) + dim Im(f).*

Dim. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia (u1, u2, …, ur) una base di Ker(f).

Poiché Ker(f) è un sottospazio di V, la base S = (u1, u2, …, ur) di Ker(f) è un sistema di vettori L.I. anche di V.

Per il teorema del completamento delle basi, esisteranno m = n - r vettori L.I. di V,

vr+1, vr+2,…,vn

tali che sia una base di V.

Dimostro che è una base di Im(f).

(1) è un sistema di generatori di Im(f).

Dim.







(2) è un sistema di vettori L.I. di Im(f).

Dim.

Sia

D’altro canto, poiché (u1, u2, …, ur) è una base di Ker(f) e , ne segue che





(poiché è una base di V) h1 = h2 =…= hr = hr+1 = hr+2 = ... = hn = 0

Dunque:

una base di Im(f) dim Im(f) = m = n – r.

Pertanto:

dim Ker(f) + dim Im(f) = r +( n – r) = n = dim V.

## &4.3 – Endomorfismi, automorfismi

Infine, poniamo le seguenti ulteriori definizioni.

Def.4.3.1 *- Dicesi endomorfismo su uno spazio vettoriale ogni applicazione lineare di V in V*, ovvero *ogni applicazione*

Prop.3.1 – *Se f: V 🡪 V è un endomorfismo su V, si dimostra che*:

(f è ingettiva)  (f è surgettiva),

ovvero, ogni *endomorfismo ingettivo è anche surgettivo e viceversa*.

Dim.

Se f è ingettiva Ker(f) = {0} (per il teorema delle dimensioni) dim V = dim Ker(f) + dim Im(f) = 0 + dim Im(f) = dim Im(f) Im (f) = V f(V) = V f è un endomorfismo surgettivo.

Def. 4.3.2 – Dicesi automorfismo ogni endomorfismo bigettivo di V in V, cioè:

(f: V → V è automorfismo) .

## &4.4 – *Matrice associata ad un’applicazione lineare – Equazioni di un’applicazione lineare*

Def. 4.4.1 - Sia f un’applicazione lineare di V in V’ e siano

B = {e1,e2,…,en} una base di V

e

B’ = {e’1, e’2,…, e’m} una base di V’.

Allora, poiché B e B’ sono basi, si ha:

1. 
2. 

.

In particolare, poiché f(e1), f(e2),…, f(en) sono vettori di V’, per essi si ha:



e, quindi, si ha:

(3) 

=+ +…+

…+

+.

D’altro canto, poiché le componenti di un vettore rispetto ad una base sono uniche, dalla (2) e dalla (3)

segue che:

1. 
2. 

…

[m] 

Tali relazioni, fra le componenti di v nella base B e le componenti di f(v) nella base B’, si dicono *equazioni dell’applicazione lineare* f rispetto alle basi

La matrice , le cui colonne sono le componenti dei vettori f(ei) rispetto alla base B’, si dice *matrice associata all’applicazione lineare* f.

Se indichiamo con:

* X il vettore formato dalle componenti di v nella base X = (x1, x2, …, xn),
* Y il vettore formato dalle componenti di f(v) nella base , Y = (y1, y2, …, ym),

le equazioni dell’applicazione lineare f si possono scrivere nella forma matriciale compatta

YT = A ∙ XT.

Si osservi che:

1. la matrice A associata ad f è una matrice di dimensione mxn;
2. rang(A) = dim Im(f), questo perché essendo f una funzione, per ogni v di V deve esistere unico v’ = f(v), ovvero il sistema YT = A ∙ XT deve ammettere un’unica soluzione e per questo il rango della matrice dei coefficienti deve essere uguale al numero delle incognite, rang(A) = dim Im(f).

Prop. 4.4.1 – Se f : V 🡪 V’ è un’applicazione lineare e se dim V = n e dim V’ = m, si dimostra che:

1. f è ingettiva rang(A) = dim V;
2. f è surgettiva rang(A) = dim V’.

Dim.(1) f ingettiva (per il teorema 4.2.1) dim V = dim Im(f) = rang(A) rang(A) = dim V = n.

Dim. (2) f surgettiva rang(A) = dim V’ = m.

Prop. 4.4.2 – C.N.S. affinché un’applicazione lineare f: V 🡪 V sia un automorfismo è che, detta A la matrice associata ad f, risulti:

det(A) 0(*A matrice non singolare*).

Dim. Poiché f: V 🡪 V, la matrice A associata ad f è una matrice di ordine nxn. Pertanto, per la proprietà precedente, si ha:

f automorfismo su V è ingettiva e surgettiva

Infine, enunciamo la seguente fondamentale proprietà.

Prop. 4.4.3 - Se V e V’ sono due spazi vettoriali e se

* *B* = {e1,e2,…,en} è una base di V

e

* (u’1, u’2, …, u’n) sono n vettori di V’,

si dimostra che esiste ed è un’unica l’applicazione lineare

f: V → V’

tale che

f(e1) = u’1, f(e2) = u’2, …, f(en) = u’n.

# CAP. 4 - ESERCIZI (APPLICAZIONI LINEARI)

1. Applicazioni Lineari : Ingettività, Surgettività, Ker(f), Im(f)

A1 – Sia f: R2  R una funzione così definita f(x,y) = x + y2 . Stabilire se f è un’applicazione lineare.

Soluzione

1. Verifichiamo se f(u+v) = f(u) + f(v), 

f(u+v) = f((x,y)+(x’,y’)) = f((x+x’,y+y’)) = (x+x’) + (y+y’)2 = x+x’+y2+y’2+2yy’

f(u) + f(v) = f(x,y) + f(x’,y’) = (x+y2) +(x’+y’2) = x + x’ + y2 + y’2

Dunque, poiché f(u+v) ≠ f(u) + f(v), f non è un’applicazione non è lineare.

A2 – Data la funzione f: R3  R2 così definita f(x,y,z) = (x – y, x + 2z),

1. Verificare che f è un’applicazione lineare
2. Calcolare Ker(f) e la sua dimensione
3. Calcolare Im(f) e la sua dimensione
4. Stabilire se f è ingettiva, surgettiva, bigettiva
5. Dire se il vettore w = (2, 3) appartiene a Im(f).

Soluzione

1. Dobbiamo dimostrare che
2. f(u+v) = f((x,y,z)+(x’,y’,z’)) = f(x+x’,y+y’,z+z’) = ((x+x’) - (y+y’), (x+x’) + 2(z+z’)) =(x - y + x’-y’, x+2z + x’+2z’);

f(u) + f(v) = f(x,y,z) + f(x’,y’,z’) = (x-y, x+2z) + (x’-y’, x’+2z’) = (x-y + x’-y’, x+2z +x’+2z’).

Dal confronto si ha: f(u+v) = f(u) + f(v).

1. f(ku) = f(k(x,y,z)) = f(kx,ky,kz) = (kx – ky, kx + 2kz);

kf(u) = kf(x,y,z) = k(x-y, x+2z) = (kx – ky, kx+2kz).

Dal confronto si ha: f(ku) = kf(u).

Dunque, f è un’applicazione lineare (omomorfismo).

1. Calcoliamo Ker(f) e dim Ker(f).

f(u) = 0 



Dunque: Ker f =  Ker f = L((-2,-2,1)).

Una base di Ker(f) è e dim(Ker f) = 1.

1. Calcoliamo Im(f) e dim Im(f).

Im(f) = f(R3) = 



.

Quindi (1,1), (-1,0), (0,2) è un sistema di generatori di Im(f).

Poiché Im(f) è un sottospazio di R2, che ha dimensione uguale a 2, essi sono L.D. e poiché (1,1) e (-1,0) sono L.I. una base di Im(f) è B = {(1,1), (-1,0)} e dim Im(f) = 2.

1. Poiché dim(Ker f) = 1 non è ingettiva e quindi neanche bigettiva.

Inoltre, poiché Im(f) è un sottospazio di R2 di dimensione 2 : dunque f è surgettiva.

1. f surgettiva 

A3 – Data la funzione f : R3  R3 così definita f(x,y,z) = (x+z, y+z, 2z), stabilire se:

1. f è un endomorfismo;
2. f è un endomorfismo ingettivo, suriettivo, bigettivo.

Soluzione

(1a) - 

f(u+v) = f((x,y,z)+(x’+y’+z’))=f(x+x’,y+y’,z+z’)=(x+x’+z+z’,y+y’+z+z’,2(z+z’)) =

= f(x+z+x’+z’, y+z+y’+z’, 2z + 2z’);

f(u)+f(v) = (x+z, y+z, 2z) + (x’+z’, y’+z’, 2z’) = (x+z+x’+z’, y+z+y’+z’, 2z+2z’).

Dunque: f(u+v) = f(u) + f(v).

(1b) - 





Dunque: f(ku) = kf(u).

f è una funzione lineare.

Sia u =(x,y,z)

f è ingettiva.

(2b) Dimostriamo che f è surgettiva.

Poiché dim Im(f) + dim Ker(f) = dimR3 e dim Ker(f) = 0  dim Im(f) = R3 , con Im(f) sottospazio di R3  Im(f) = R3 f è surgettiva..

(c) Poiché f è ingettiva e surgettiva, f è bigettiva.

A4 – Sia f : R3  R3 così definita f(x,y,z) = (x-y, x-z, y-z).

1. Stabilire se f è un endomorfismo
2. Calcolare una base e la dimensione di Ker(f)
3. Calcolare una base e la dimensione di Im(f)
4. Stabilire se f è ingettiva, surgettiva, bigettiva
5. Stabilire quale dei seguenti vettori (0,0,0), (1,1,0), (-1,0,1), (5,6,1) appartiene a Im(f).

Soluzione

(1a) Dimostriamo che f(u+v) = f(u) + f(v).

* f(u+v) = f((x,y,z)+(x’+y’+z’)) = f(x+x’, y+y’, z+z’) = (x+x’-y-y’, x+x’-z-z’, y+y’-z-z’) = (x-y+x’-y’, x-z+x’-z’,y-z+y’-z’);
* f(u)+f(v)=f(x,y,z)+f(x’,y’,z’)=(x-y,x-z,y-z) + (x’-y’,x’-z’,y’-z’) = (x-y+x’-y’,x-z+x’-z’,y-z+y’-z’).

Dunque: f(u+v) = f(u) + f(v).

(1b) Dimostriamo che f(k∙u) = k∙f(u).

* f(ku) = f(k(x,y,z)) = f(kx,ky,kz) = (kx-ky,kx-kz,ky-kz);
* kf(u) = kf(x,y,z) = k(x-y,x-z,y-z) = (kx-ky,kx-kz,ky-kz).

Dunque: f(k∙u) = k∙f(u).

Per (1a) e (1b), f è un’applicazione lineare.

1. Calcoliamo una base e la dimensione di Ker(f).

Per definizione è .

Risolvo:



.

Di conseguenza, dim Ker(f) = 1 e una base di Ker(f) è BKer(f) = {(1,1,1)}.

1. Calcoliamo una base e la dimensione di Im(f).

Per definizione è: Im(f) = 





.

Se consideriamo la matrice avente per colonne le componenti dei tre vettori generatori di Im(f)



poiché a11 = 1, a12,12 = 0 – (-1) = 1, a123,123 = 0 + 0 + 0 –(0 – 1 + 1) = 0, si deduce che i tre vettori sono L.D.

Due vettori L.I. sono



e, quindi, una base e la dimensione Im(f) sono:

e dim Im(f) = 2.

1. Poiché Ker(f){0} f non è ingettiva e poiché dim Im(f) = 2, l’applicazione f non è surgettiva. Quindi f non è bigettiva.
2. (0,0,0) , in quanto Im(f) è un sottospazio vettoriale.

(1,1,0), (-1,0,1)  perché sono i vettori che generano Im(f).

Infine, per verificare se u’ = (5,6,1) , è sufficiente verificare se i vettori

u’, u1’, u2’

sono L.D.

Poiché:



i tre vettori sono L.D.

A5 – Sia f : R4  R4 un’applicazione così definita f(x,y,z,t) = (x,x,x,x).

1. Stabilire se f è un’applicazione lineare
2. Determinare una base e la dimensione di Ker(f)
3. Determinare una base e la dimensione di Im(f)
4. Stabilire se f è ingettiva, surgettiva, bigettiva.

Soluzione

(1a) f(u+u’) = f((x,y,z,t)+(x’,y’,z’,t’)) = f(x+x’,y+y’,z+z’,t+t’) = (x+x’,x+x’,x+x’,x+x’)

f(u) + f(u’) = f(x,y,z,t) + f(x’,y’,z’,t’) = (x,x,x,x) + (x’,x’,x’,x’) = (x+x’,x+x’,x+x’,x+x’);

* f(u) + f(u’) = (x,x,x,x) + (x’,x’,x’,x’) = (x+x’,x+x’,x+x’,x+x’).

Dunque: f(u+u’) = f(u) + f(u’).

(1b) f(ku) = f(k(x,y,z,t)) = f(kx,ky,kz,kt) = (kx,kx,kx,kx);

kf(u) = kf(x,y,z,t) = k(x,x,x,x) = (kx,kx,kx,kx).

Dunque: f(ku) = k f(u).

L’applicazione f è lineare.

Dim. 2 - Calcoliamo una base e la dimensione di Ker(f).

Per definizione è .

Risolvo: 



,

dove

e2 = (0,1,0,0), e3 = (0,0,1,0), e4 = (0,0,0,1)

sono tre vettori (L.I.) della base canonica di R4.

Pertanto una base di Ker(f) è B = {e2, e3, e4} e dim Ker(f) = 3.

Dim 3 - Calcoliamo una base e la dimensione di Im(f).

Per definizione è:

Im(f) = 



.

Quindi, una base di Im(f) è

B = {}

e la dimensione è

dim Im(f) = 1.

Dim.

(4a) f non è ingettiva perché Ker(f) ;

(4b) f non è surgettiva perché dim Im(f) = 1 è un sottospazio proprio di R4 

(4c) f non è bigettiva, non essendo né ingettiva né surgettiva.

B) Matrici associate alle applicazioni lineari

B1 – Sia data l’applicazione lineare f: R2  R3 così definita:

f(x,y) = (x + 2y, 3y, x – y).

Determinare:

1. l’immagine del vettore v = (1,2);
2. la matrice A associata ad f e le equazioni dell’applicazione lineare rispetto alle basi canoniche B = {e1, e2} di R2 e B’ = {e’1, e’2, e’3} di R3;
3. la matrice A’ associata ad f rispetto alle basi B1 = {(1,0), (1,1)} di R2 e B’1 = {(1,1,0), (1,0,1), (0,0,1)} di R3.

Soluzione

1. f(v) = f(1,2) = (1+4,6,1-2) = (5, 6, -1).
2. Calcoliamo dapprima f(e1) ed f(e2):

f(e1) = f(1,0) = (1,0,1)

f(e2) = f(0,1) = (2,3,-1)

Poi calcoliamo le componenti di tali immagini rispetto alla base B’.

Poiché B’ è la base canonica di R3, (1,0,1) e (2,3,-1) sono proprio le componenti di f(e1) e di f(e2) rispetto a B’.

Infine, scriviamo la matrice A associata ad f relativamente alle basi canoniche B e B’:

A = 

Di conseguenza, le equazioni dell’omomorfismo sono date da:

X’ = A ∙ X .

1. Poiché f(1,0) = (1,0,1) ed f(1,1) = (1+2,3,1-1) = (3,3,0), le coordinate di f(1,0) e di f(1,1), rispetto alla base B’1 = {(1,1,0), (1,0,1), (0,0,1)}, sono:

* f(1,0) = xe’1 + ye’2 + ze’3 

;

* f(1,1) = xe’1 + ye’2 + ze’3 

.

Quindi, la matrice A’ associata all’omomorfismo f, rispetto alle basi B1 e B’1 è:

A’ = .

B2 - Sia data l’applicazione lineare f: R3  R2 così definita:

f(x,y,z) = (x - y, z).

Determinare le matrici associate rispetto alle seguenti basi:

1. le basi canoniche B di R3 e B’ di R2;
2. la base canonica B di R3 e la base B’1 = {(1,1), (-1, 1)} di R2.

Soluzione

1. I passi da seguire sono:

1) Calcoliamo le immagini degli elementi di B:

f(e1) = f(1,0,0) = (1-0,0) = (1,0);

f(e2) = f(0,1,0) = (0–1,0) = (-1,0);

f(e3) = f(0,0,1) = (0-0,1) = (0,1).

2) Calcoliamo le componenti di f(e1), f(e2), f(e3) rispetto alla base canonica B’ di R2:

f(e1) = f(1,0,0) = (1-0,0) = (1,0);

f(e2) = f(0,1,0) = (0–1,0) = (-1,0);

f(e3) = f(0,0,1) = (0-0,1) = (0,1).

3) Scriviamo la matrice A associata ad f relativamente alle basi canoniche B e B’:

A = .

1. I passi da seguire sono:
2. Scrivere le immagini degli elementi di B:

f(e1) = (1,0);

f(e2) = (-1,0);

f(e3) = (0,1).

1. Calcoliamo le componenti di f(e1), f(e2), f(e3) rispetto alla base canonica

B’1 = {(1,1), (-1,1)} di R2:

* f(e1) = x(1,1) +y(-1,1) = (x-y, x+y)

;

* f(e2) = x(1,1) +y(-1,1) ;
* f(e3) = x(1,1) +y(-1,1) 

1. Scriviamo la matrice A’ associata ad f rispetto alle basi B e B’1:

A’ = .

B3 – Data l’applicazione lineare f : R4  R3 così definita

f(x,y,z,t) = (x – 5t, y + z + t, x – y – z – t)

calcolare:

1. la matrice A associata ad f rispetto alle basi canoniche di R4 ed R3;
2. dire se f è ingettiva, surgettiva, bigettiva.

Soluzione

1. Le basi di partenza e di arrivo sottintese sono quelle canoniche di R4 e di R3:

B = {e1,e2,e3,e4} e B’ = {e’1,e’2,e’3}.

Calcoliamo le immagini di e1,e2,e3,e4:

f(e1) = f(1,0,0,0) = (1,0,1); f(e2) = f(0,1,0,0) = (0,1,-1);

f(e3) = f(0,0,1,0) = (0,1,-1); f(e4) = f(0,0,0,1) = (-5,1,-1).

Le componenti di f(e1), f(e2), f(e3), f(e4) rispetto alla base canonica B’ = {e’1,e’2,e’3} sono:

(1,0,1); (0,1,-1); (0,1,-1); (-5,1,-1)

e quindi la matrice A associata all’applicazione f, relativa alle basi B e B’, è:

A = 

1. Calcoliamo il rango di A.

Poiché a123,124 = .

Di conseguenza, poiché:

* rang(A) = 3 dim R4 = 4 f non è ingettiva;
* rang(A) = dim R3= 3 f è surgettiva.
* Quindi f non è bigettiva.

B4 – Sia f: R3  R2 l’applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche B di R3 e B’ di R2 è

A = 

Determinare:

1. l’immagine del generico vettore v = (x,y,z) di R3;
2. la matrice A1 associata ad f rispetto alle basi B1 = {(0,-1,0),(1,0,1),(0,1,1)} di R3 e B’1 = {(1,1),(0,1)} di R2.

Soluzione

1. Se v = (x,y,z) è il generico vettore di R3 e se f(v) = (x’,y’) è la sua immagine, deve aversi:

.

1. Per calcolare la matrice A’ associata alle nuove basi B1 e B’1 dobbiamo calcolare le componenti delle immagini dei vettori di B1 rispetto alla base B’1.
2. f(0,-1,0) = (0,-1); f(1,0,1) = (0,2); f(0,1,1) = (-1,1)
3. (0,-1) = x’(1,1) + y’(0,1) = (x’,x’) +(0,y’) = (x’,x’+y’) ;

(0,2) = (x’,x’+y’) ;

(-1,1) = (x’,x’+y’) 

La matrice A’ è:

.

B5 – Sia f: R3  R2 l’applicazione lineare tale che

.

1. Determinare la matrice A associata ad f e le equazioni di f rispetto alle basi canoniche di R3 e R2.
2. Calcolare una base e la dimensione di Im(f) e Ker(f);
3. dire se l’applicazione f è ingettiva e se è surgettiva;
4. dato il vettore v = (2,-1,3) e il sottospazio vettoriale W = L((1,0,1),(-1,1,0)) di R3, determinare f(v) e f(W).

Soluzione

1. Le componenti di f(e1), f(e2), f(e3), rispetto alla base canonica

B’ = {e’1, e’2}

sono proprio (1,1), (1,0), (1,1), sicché la matrice associata ad f è:

A = .

Inoltre, se v = (x,y,z) è il generico vettore di R3 e poniamo f(v) = (x’,y’), si ha:

 

1. Poiché B = {e1, e2, e3} è una base di R3 {f(e1), f(e2), f(e3)} è un sistema di generatori di f(R3) = Im(f)

.

Una base di Im(f) è {(1,1), (1,0)} dim Im(f) = 2 = rang(A).

Calcoliamo, ora, una base e la dimensione di Ker f.





Dunque, Ker(f) è il sottospazio vettoriale di R3 generato dal vettore (1,0,-1), con dimensione dim Ker(f) = 1.

1. Poiché rang(A) = 2 dim R3, ne segue che f non è ingettiva, e, poiché rang(A) = 2 = dim R2, ne segue che f è surgettiva.
2. Calcoliamo f(v):

f(v) = f((2,-1,3)) = (2+(-1)+3, 2+3) = (4,5).

Calcoliamo f(W).

Poiché i generatori di W, {(1,0,1), (-1,1,0)}, sono L.I., {(1,0,1), (-1,1,0)} è una base di W

{f(1,0,1), f(-1,1,0)} = {(2,2),(0,-1)} è un sistema di generatori di f(W).

Pertanto, f(W) = L((2,2),(0,-1)) e poiché f(W) è un sottospazio di R2 di dimensione 2 risulta f(W) = R2.